

## Ćwiczenie 2

Prawa autorskie zastrzeżone:  
Zakład Teorii Obwodów PWt

### STANY NIEUSTALONE W OBWODACH RC, RL I RLC

Celem ćwiczenia jest:

- obserwacja stanów nieustalonych w obwodach pierwszego i drugiego rzędu przy pobudzeniu jednostkowym,
- pomiar wielkości charakteryzujących reakcje układów w stanach nieustalonych,
- porównanie wyników pomiarów i obserwacji z wynikami uzyskanymi z analizy teoretycznej.

W ćwiczeniu należy:

- zbadać układ pierwszego rzędu RC,
- zbadać układ pierwszego rzędu RL,
- zbadać układ drugiego rzędu RLC,
- zaprojektować układ dający odpowiedź aperiodyczną, aperiodyczną krytyczną i oscylacyjną.

#### A. Wprowadzenie

##### 1. Wstęp

Stanem ustalonym nazywa się stan równowagi układu, w którym parametry charakteryzujące reakcję np. wartość maksymalna, częstotliwość, faza początkowa nie zmieniają się w czasie. Wszelkie zmiany w układzie, zwane komutacją np.: włączenie lub odłączenie źródła, zmiany połączeń lub wartości elementów itp., powodują zaburzenie istniejącego stanu ustalonego. Nowy stan ustalony nie może wystąpić natychmiastowo, lecz jest poprzedzony w układach inercyjnych pewnym stanem przejściowym. Stan przejściowy istniejący w układzie, podczas przejścia z jednego stanu ustalonego w drugi, nazywa się stanem nieustalonym.

Występowanie stanu nieustalonego jest spowodowane istnieniem energii zmagazynowanej w cewkach i kondensatorach. W układach fizycznych energia ta podczas przejścia z jednego stanu ustalonego w drugi może zmieniać się tylko w sposób ciągły, gdyż zmiany skokowe powodowałyby występowanie w układzie nieskończenie wielkich prądów lub napięć. Z zasady zachowania energii pola elektrycznego i magnetycznego wynikają, więc w układach fizycznych zasady ciągłości zmian prądów w cewkach i napięć na kondensatorach. Wartości tych wielkości tuż po komutacji pozostają takie same jak przed komutacją, a następnie zmieniają się płynnie. Teoretycznie zakłada się, że komutacja zachodzi natychmiastowo, np. w chwili czasowej  $t = 0$ . Można, zatem zapisać, że dla występujących w realnych obwodach

$$i_L(0^-) = i_L(0^+), \quad u_C(0^-) = u_C(0^+), \quad (1)$$

gdzie  $i_L(0^-)$  i  $u_C(0^-)$  - wartości prądu w cewce i napięcia na kondensatorze w chwili przed komutacją,

$i_L(0^+)$  i  $u_C(0^+)$  - wartości prądu w cewce i napięcia na kondensatorze po komutacji.

Równości (1) określają tzw. warunki początkowe układu.

Analizę stanów nieustalonych można przeprowadzić metodą klasyczną, tj. rozwiązując równania różniczkowe opisujące układ przy danych warunkach początkowych. Szczegółowe

omówienie tej metody i przykłady rozwiązań układów w stanach nieustalonych można znaleźć w literaturze [2].

Szczególnie wygodną metodą analizy stanów nieustalonych jest metoda operatorowa. Wynikiem rozwiązania układu równań operatorowych opisujących układ SLS,  $e$ ,  $i_z$  przy pobudzeniu stałym bądź okresowym, jest całkowita reakcja  $r(t)$  w postaci

$$r(t) = r_w(t) + r_s(t), \quad (2)$$

gdzie:  $r_w(t)$  - składowa wymuszona wywołana pobudzeniem,  
 $r_s(t)$  - składowa swobodna zależna tylko od własności układu.

Równość (2) jest słuszna przy założeniu, że bieguny transmitancji operatorowej układu są różne od biegunów transformat pobudzeń.

Składowa swobodna  $r_s(t)$  jest wywołana zaburzeniem stanu równowagi w chwili komutacji  $t = 0$  i zależy od warunków początkowych układu. Przebieg  $r_s(t)$  jest uwarunkowany biegunami transmitancji operatorowej układu

$$H(s) = \frac{R(s)}{P(s)} = \frac{L(s)}{M(s)}, \quad (3)$$

gdzie:  $L(s)$ ,  $M(s)$  - wielomiany zmiennej  $s$ ,  
 $R(s)$  - transformata Laplace'a reakcji (przy zerowych warunkach początkowych),  
 $P(s)$  - transformata Laplace'a pobudzenia.

Zera wielomianu  $M(s)$  zwane są częstotliwościami własnymi układu, a stopień wielomianu  $M(s)$  określa rząd układu. Jeśli wszystkie częstotliwości własne układu leżą w lewej półpłaszczyźnie  $s$ , to składowa swobodna reakcji układu jest tłumiona, tj.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r_s(t) = 0 \quad (4)$$

Jeśli warunek (4) jest spełniony, to reakcję układu w stanie nieustalonym można zapisać w postaci

$$r(t) = r_s(t) + r_w(t) = r_p(t) + r_u(t) \quad (5)$$

gdzie:  $r_p(t)$  - składowa przejściowa,  
 $r_u(t)$  - składowa ustalona.

W stanie ustalonym całkowita reakcja jest równa składowej ustalonej, tzn.

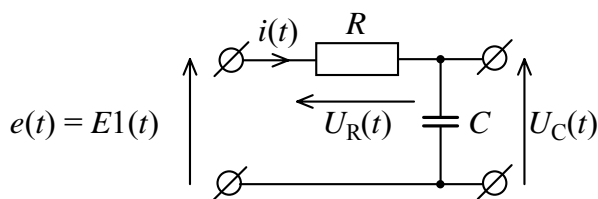
$$r(t) = r_u(t) = \begin{cases} const, & \text{gdy } p(t) = const, \\ r_u(t+T), & \text{gdy } p(t) = p(t+T), \end{cases} \quad (6)$$

gdzie:  $p(t)$  – pobudzenie układu.

Teoretycznie układ osiąga stan ustalony po upływie czasu nieskończenie długiego. W praktyce wyznacza się tzw. czas ustalania się, po którego upływie przyjmuje się, że układ jest w stanie ustalonym.

W ćwiczeniu są badane układy pierwszego i drugiego rzędu o zerowych warunkach początkowych. Stosując rachunek operatorowy wyznaczono składowe przejściowe i ustalone prądów i napięć występujących na elementach badanych układów przy pobudzeniu  $p(t) = e(t) = E \mathbf{1}(t)$ .

## 1. Układ pierwszego rzędu RC



Rys. 1

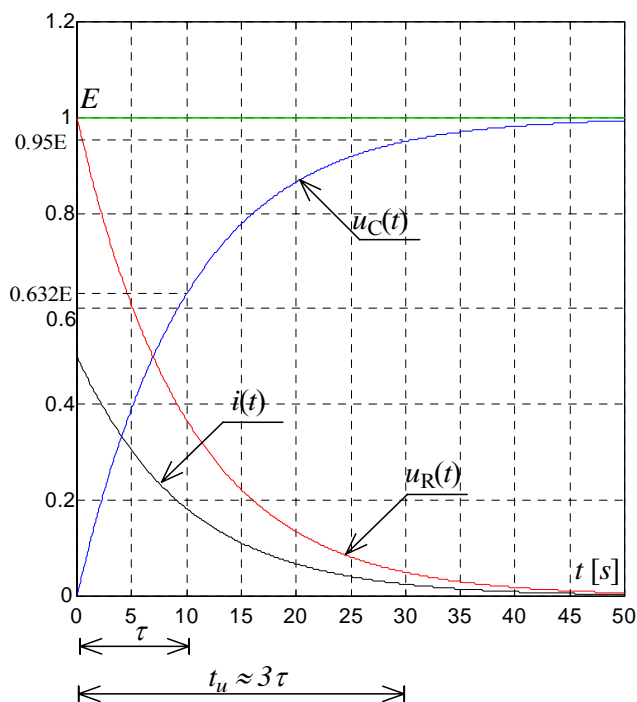
$$i(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{E}{R} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right\} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} 1(t). \quad (7)$$

$$u_c(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{E}{RC} \frac{1}{s \left( s + \frac{1}{RC} \right)} \right\} = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) 1(t) \quad (8)$$

gdzie:  $i_u(t) = 0$ ,  $u_{cu}(t) = E1(t)$  - składowe ustalone,

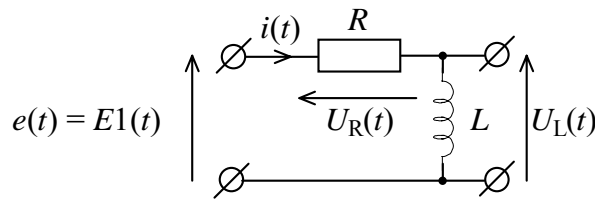
$i_p(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} 1(t)$ ,  $u_{cp}(t) = -E e^{-\frac{t}{RC}} 1(t)$  - składowe przejściowe.

Przebiegi prądu i napięć w obwodzie RC ( $R = 2 \Omega$ ,  $C = 5 \text{ F}$ ,  $E = 1 \text{ V}$ ) w stanie nieustalonym zilustrowane są na rys. 2. Zaznaczony na wykresie czas  $\tau = RC$  jest stałą czasu układu. Wielkość ta charakteryzuje szybkość zanikania przebiegu przejściowego. Dla  $t_u \approx 3\tau$  napięcie na kondensatorze osiąga poziom  $0,95 E$ .



Rys. 2

## 2. Układ pierwszego rzędu RL



Rys. 3

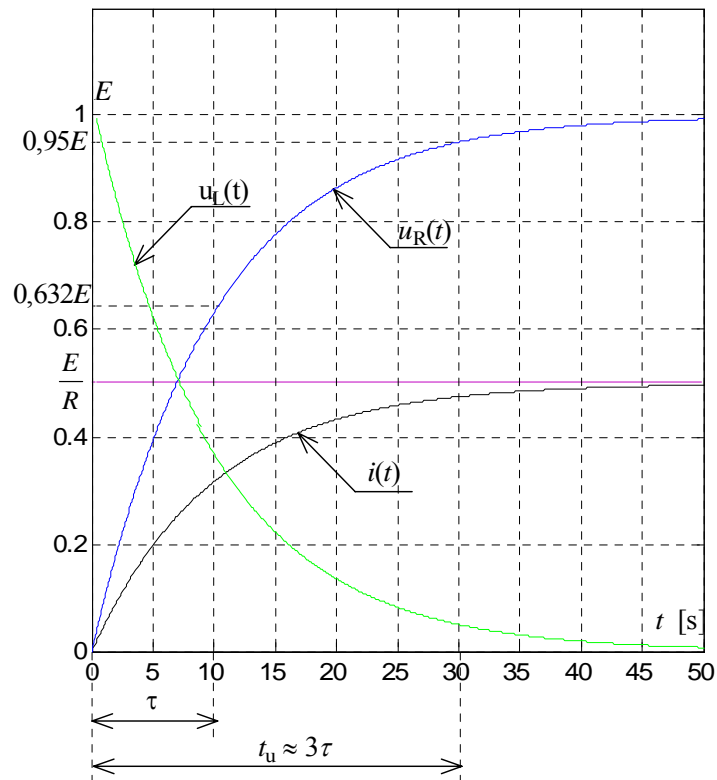
$$i(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{E}{s}}{R + sL} = \frac{E}{L} \frac{1}{s \left( s + \frac{R}{L} \right)} \right\} = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) 1(t), \quad (9)$$

$$u_l(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{E}{\left( s + \frac{R}{L} \right)} \right\} = E e^{-\frac{R}{L}t} 1(t), \quad (10)$$

gdzie:  $i_u(t) = \frac{E}{R} 1(t)$ ,  $u_{Lu}(t) = 0$  - składowe ustalone,

$i_p(t) = -\frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} 1(t)$ ,  $u_p(t) = E e^{-\frac{R}{L}t} 1(t)$  - składowe przejściowe.

Przebiegi prądu i napięć w obwodzie RL ze stałą czasową  $\tau = L/R$  ( $R = 2 \Omega$ ,  $L = 20 \text{ H}$ ,  $E = 1 \text{ V}$ ) w stanie nieustalonym zilustrowane są na rys. 4.

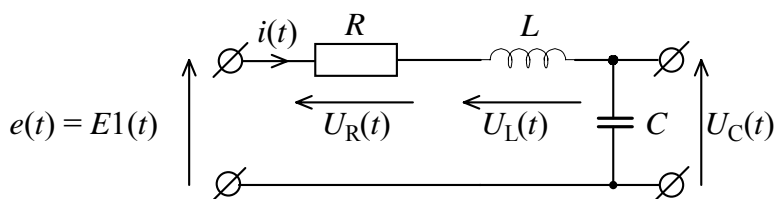


Rys. 4

Czas ustalania się  $t_u$  jest zdefiniowany jako czas, po którego upływie wartość odpowiedzi jednostkowej układu różni się od wartości ustalonej co najwyżej o 5%, lub równoważnie jako czas, po którego upływie wartość odpowiedzi przejściowej wynosi tylko 5% wartości początkowej. Dla układów pierwszego rzędu

$$t_u = 3\tau. \quad (11)$$

### 3. Układ drugiego rzędu RLC



Rys. 5

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{E}{L} \frac{1}{s^2 + s \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} \right\}, \quad (12)$$

$$u_c(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{E}{sLC} \frac{1}{s^2 + s \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} \right\}, \quad (13)$$

$$u_L(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ E \frac{1}{s^2 + s \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} \right\}. \quad (14)$$

Częstotliwości własne układu wynoszą:

$$s_1 = -A + B, \quad s_2 = -A - B, \quad (15)$$

gdzie:

$$A = \frac{R}{2L}, \quad B = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}.$$

#### 3. 1. Przypadek aperiodyczny

Jeśli B jest rzeczywiste, co odpowiada warunkowi

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (16)$$

przebiegi mają charakter aperiodyczny i wyrażają się następującymi wzorami:

$$i(t) = \left( \frac{E}{LB} e^{-At} \operatorname{sh}(Bt) \right) 1(t), \quad (17)$$

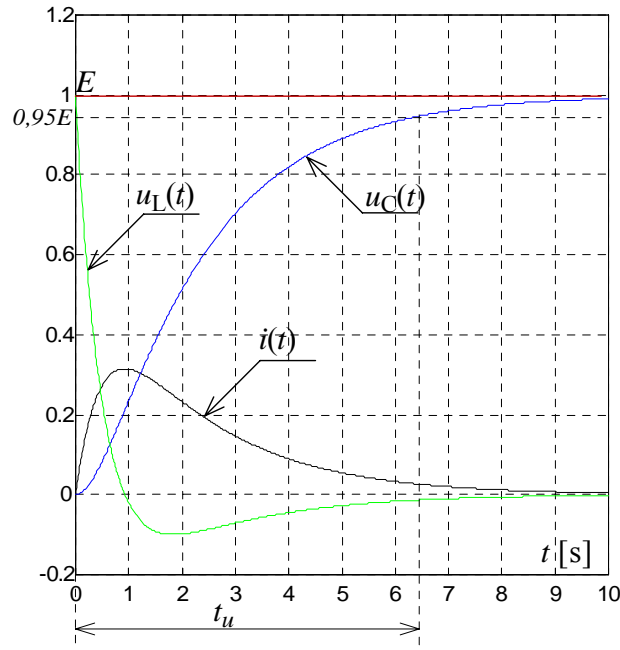
$$u_c(t) = E \left[ 1 - e^{-At} \left( ch(Bt) + \frac{A}{B} sh(Bt) \right) \right] 1(t), \quad (18)$$

$$u_L(t) = E \left[ e^{-At} \left( ch(Bt) - \frac{A}{B} sh(Bt) \right) \right] 1(t), \quad (19)$$

gdzie składowe ustalone i przejściowe:

$$\begin{aligned} i_u(t) &= 0, & u_{Cu}(t) &= E 1(t), & u_{Lu}(t) &= 0, \\ u_{cp}(t) &= -E e^{-At} \left( ch(Bt) + \frac{A}{B} sh(Bt) \right) 1(t), \\ u_{Lp}(t) &= u_L(t). \end{aligned}$$

Przebiegi aperiodyczne prądu i napięć ( $E = 1$ ,  $R = 2.5 \Omega$ ,  $L = 1$  H,  $C = 1$  F) przedstawiono na rys. 6.



Rys. 6

### 3. 2. Przypadek aperiodyczny krytyczny

W przypadku, gdy  $B = 0$

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{kr}, \quad (20)$$

otrzymuje się:

$$i(t) = \frac{E}{L} t e^{-At} 1(t), \quad (21)$$

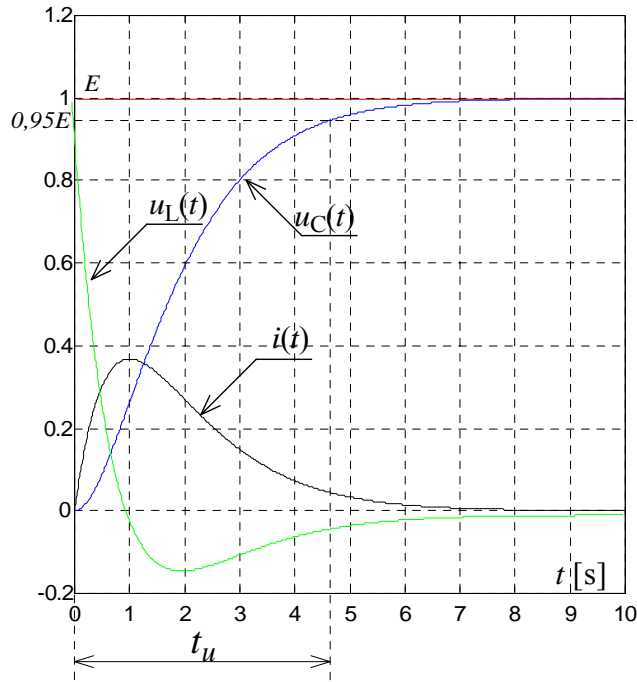
$$u_C(t) = E \left( 1 - e^{-At} - A t e^{-At} \right) 1(t), \quad (22)$$

$$u_L(t) = E (1 - At) e^{-At} 1(t). \quad (23)$$

Rezystancję  $R_{kr}$  nazywa się krytyczną rezystancją obwodu. Przebiegi prądu i napięć dla przypadku aperiodycznego krytycznego ( $E = 1$  V,  $R = 2 \Omega$ ,  $L = 1$  H,  $C = 1$  F) przedstawiono na rys.7.

W przypadkach aperiodycznych czas ustalania się jest określony podobnie jak dla układów

pierwszego rzędu. Przypadek krytyczny jest przypadkiem, w którym przebiegi prądu i napięć osiągają wartości ustalone w najkrótszym czasie.



Rys. 7

### 3. 3. Przypadek oscylacyjny

Jeśli B jest urojone, tj.  $B = j\beta$ , co odpowiada warunkowi

$$R < R_{kr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (24)$$

przebiegi prądu i napięć można wyrazić wzorami:

$$i(t) = \left( \frac{E}{\beta L} e^{-At} \sin(\beta t) \right) 1(t), \quad (25)$$

$$u_C(t) = E \left[ 1 - \frac{e^{-At}}{\sin \theta} \sin(\beta t + \theta) \right] 1(t), \quad (26)$$

$$u_L(t) = -E \frac{e^{-At}}{\sin \theta} \sin(\beta t - \theta) 1(t), \quad (27)$$

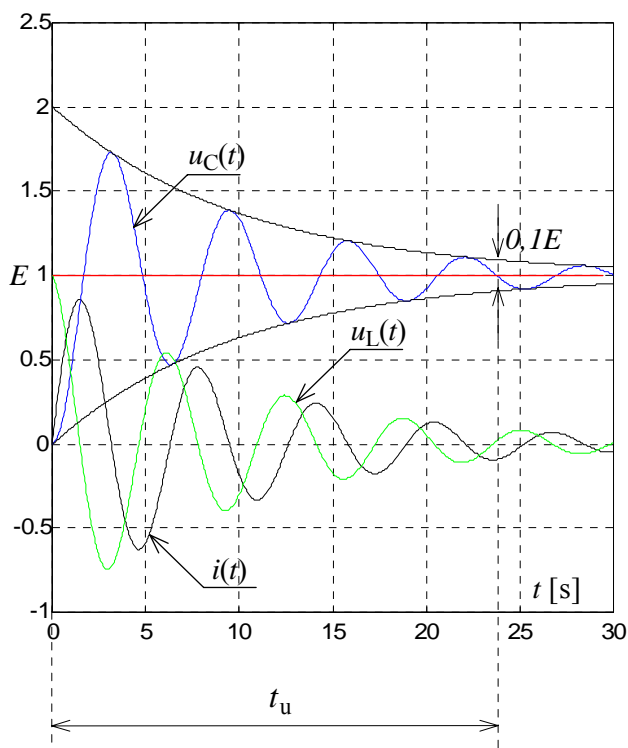
gdzie  $\theta = \arctg \left( \frac{\beta}{A} \right)$ .

Jak widać z powyższych wzorów, przebiegi prądu i napięć (rys. 8,  $E = 1$  V,  $R = 0.2$   $\Omega$ ,  $L = 1$  H,  $C = 1$  F) mają charakter oscylacyjny tłumiony, przy czym pulsacja drgań swobodnych

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - A^2} = \sqrt{\omega_0^2 - A^2}, \quad (28)$$

gdzie  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

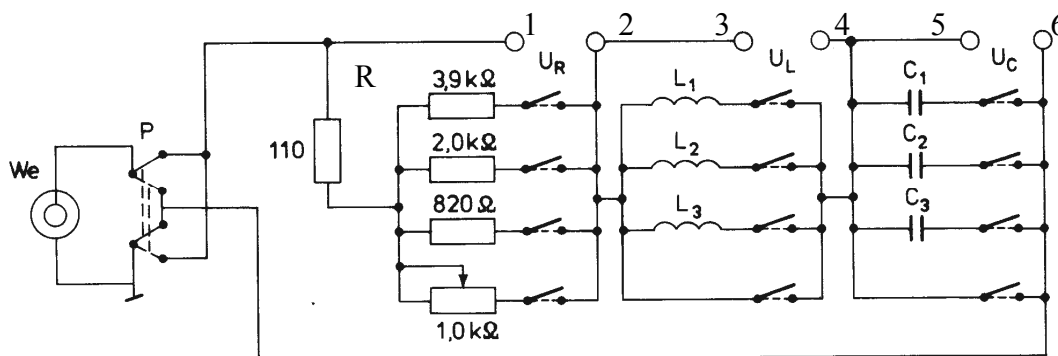
W przypadku oscylacyjnym czas ustalania  $t_u$  definiuje się jako czas, po upływie którego wartość obwiedni przebiegu oscylacyjnego różni się od wartości ustalonej nie więcej niż o 5%.



Rys. 8

## B. Część laboratoryjna

Badany układ  $RLC$  (rys.9) wykonany jest w postaci panelu z możliwością zestawienia układów  $RC$ ,  $RL$  i  $RLC$  o różnych wartościach elementów.



Rys. 9

W celu umożliwienia obserwacji na oscyloskopie reakcji układu na pobudzenie skokiem jednostkowym stosuje się pobudzenie przebiegiem prostokątnym. Częstotliwość powtarzania impulsów prostokątnych należy tak dobrać, aby podczas trwania impulsu reakcja układu osiągała praktycznie wartość ustaloną. Obserwowane wówczas na ekranie oscyloskopu przebiegi napięć w czasie trwania impulsu prostokątnego można traktować jako reakcje całkowite układu na



pobudzenie jednostkowe. W przypadku źle dobranej częstotliwości powtarzania impulsów w obserwowanym przebiegu nie można wyróżnić reakcji na pobudzenie jednostkowe.

Obserwacja napięć na ekranie oscyloskopu jest możliwa jedynie względem masy układu. W przypadku, gdy np. przełącznik  $P$  znajduje się w pozycji oznaczonej linią ciągłą, a przewód masy oscyloskopu dołączony do gniazda 6, możliwa jest obserwacja napięcia  $u_C$  lub  $u_L$  (przy zwartym kondensatorze). Podczas obserwacji napięcia  $u_R$  należy przełącznik  $P$  umieścić w pozycji oznaczonej linią przerywaną, a przewód masy oscyloskopu dołączyć do gniazda 1.

Wykaz przyrządów:

- generator fali prostokątnej,
- dekada rezystancyjna,
- oscyloskop wraz z drukarką.

### 1. Badanie układu pierwszego rzędu RC przy pobudzeniu $E I(t)$

- 1.1. Wydrukować oscylogramy napięcia  $u_C(t)$  dla trzech różnych wartości rezystancji  $R$  przy wybranej wartości pojemności  $C$ . Dla jednej z wartości  $R$  wydrukować również oscylogram napięcia  $u_R(t)$ . Dla każdej z tych rezystancji zmierzyć stałą czasu za pomocą oscyloskopu.
- 1.2. Wydrukować oscylogramy napięcia  $u_C(t)$  dla trzech różnych wartości pojemności  $C$  przy wybranej wartości  $R$ . Dla jednej z wartości  $C$  wydrukować również oscylogram napięcia  $u_R(t)$ . Dla każdej z tych pojemności zmierzyć stałą czasu za pomocą oscyloskopu.
- 1.3. Zaznaczyć na oscylogramach stałe czasu  $\tau$  i czasy ustalania się  $t_u$ .
- 1.4. Obliczyć wartości pojemności  $C_1, C_2, C_3$  na podstawie zmierzonych wartości  $\tau$  (uwzględnić rezystancję wewnętrzną generatora  $R_g = 50 \Omega$ ).

### 2. Badanie układu pierwszego rzędu RL przy pobudzeniu $E I(t)$

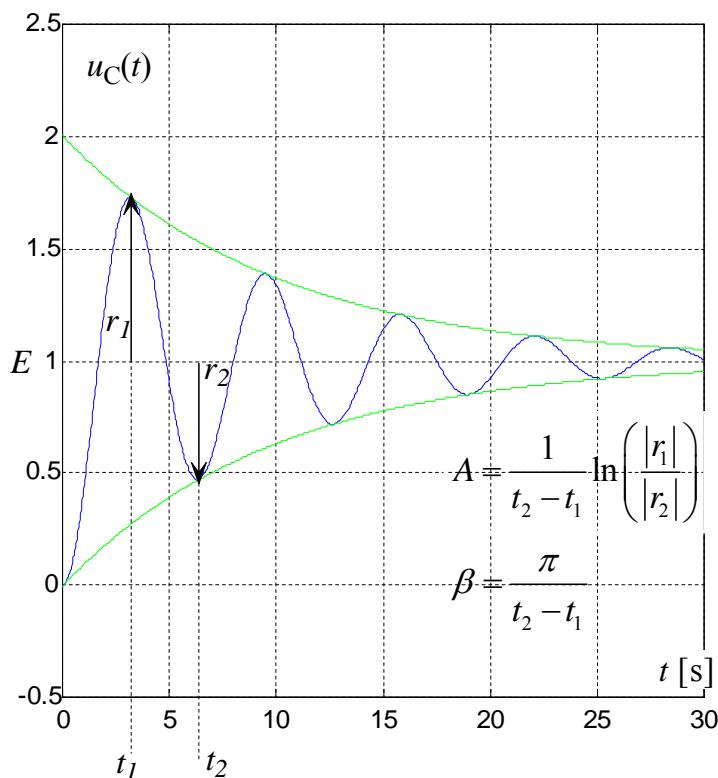
- 2.1. Wydrukować oscylogramy napięcia  $u_L(t)$  dla trzech różnych wartości rezystancji  $R$  przy wybranej wartości indukcyjności  $L$ . Dla jednej z wartości  $R$  wydrukować również oscylogram napięcia  $u_R(t)$ . Dla każdej z tych rezystancji zmierzyć stałą czasu za pomocą oscyloskopu.
- 2.2. Wydrukować oscylogramy napięcia  $u_L(t)$  dla trzech różnych wartości  $L$  przy wybranej wartości  $R$ . Dla jednej z wartości  $L$  wydrukować oscylogram napięcia  $u_R(t)$ . Dla każdej z tych indukcyjności zmierzyć stałą czasu za pomocą oscyloskopu.
- 2.3. Zaznaczyć na oscylogramach stałe czasu  $\tau$  i czasy ustalania się  $t_u$ .
- 2.4. Obliczyć wartości indukcyjności  $L_1, L_2, L_3$  na podstawie zmierzonych wartości  $\tau$  (uwzględnić rezystancję wewnętrzną generatora).

### 3. Badanie układu drugiego rzędu RLC przy pobudzeniu $E I(t)$

- 3.1. Dobrać pojemność  $C$  i indukcyjność  $L$  tak, aby zmieniając rezystancję  $R$  uzyskać odpowiedź o charakterze aperiodycznym, aperiodycznym krytycznym i oscylacyjnym. Dla wszystkich przypadków wydrukować oscylogramy napięć  $u_C(t)$  i  $u_R(t)$ .
- 3.2. Dla indukcyjności  $L_2$  i każdej pojemności  $C$  dobrać  $R$  tak, aby podczas zmiany  $C$  uzyskiwać zawsze przypadek oscylacyjny. Wyznaczyć z każdego z oscylogramów stałe  $A$  i  $\beta$ . Czy  $A$  oraz  $\beta$  zależą od wielkości pojemności  $C$ ?

- 3.3 Zmierzyć i przedstawić w postaci wykresu zależność czasu ustalania  $t_u = f(R)$  dla ustalonych w p.3.1 wartości  $L$  i  $C$  i rezystancji  $R$  zmienianej w zakresie od  $0.2R_{kr}$  do  $5R_{kr}$ .

Sposób wyznaczania stałej tłumienia  $A$  zilustrowano na rys. 10.



Rys. 10

Uwagi dla studentów

1. W ćwiczeniu wykorzystujemy generator fali prostokątnej jako źródło skokowo zmieniającego się napięcia. Umożliwia to obserwację powtarzających się cykli ustalania się napięć na elementach badanego obwodu. Warunkiem jest dostatecznie długi czas trwania impulsu o polaryzacji dodatniej, aby badane napięcie osiągnęło poziom ustalony przed zakończeniem tego impulsu.
2. Warto ustawić tak poziom sygnału z generatora, aby wykres był kreślony na możliwie jak największej powierzchni ekranu. Należy jednocześnie ustalić położenie kreślonych krzywych na ekranie względem rastra, aby punkt początkowy znajdował się na przecięciu linii poziomej i pionowej w lewym dolnym lub górnym rogu ekranu, oraz by napięcie  $E$  ustalało się na pewnej „okrągłej” wartości, np. wynoszącej np. 4 V, lub 5 V. Kanały A i B oscyloskopu powinny być przełączone na pomiar ze składową stałą (DC).
3. Przy badaniu wpływu zmian parametrów  $R$ ,  $L$  i  $C$  na kształt reakcji otrzymane dla różnych ustawień krzywe można nanieść na ten sam wykres. Można zachować wówczas tą samą skalę czasu (czas/dz).

4. Obserwowane przebiegi można wydrukować na drukarce. Aby to zrobić trzeba zapamiętać właściwie „ustawioną” krzywą (przycisk STORE) i zatrzymać na ekranie (HOLD); a następnie wcisnąć przycisk znajdujący się z tyłu oscyloskopu. Drukarka powinna być ustawiona w tryb ON LINE.
5. Jeśli zapamiętamy przebiegi z obydwu kanałów oscyloskopu i zatrzymamy je równocześnie na ekranie (wciśnięty przycisk STORE) możemy wydrukować dwa różne przebiegi na tym samym wykresie.
6. Przy badaniu układów  $RL$  i  $RLC$  warto zwrócić uwagę na to, że właściwości cewek użytych w układzie różnią się znacznie od ich idealizowanych odpowiedników - induktorów.
7. Zaleca się użyć opornicę dekadową jako rezystor  $R$  (rys. 9, zaciski 1 - 2).

### Pytania kontrolne

1. Narysować przebiegi napięć i prądu w szeregowym obwodzie  $RC$  ( $RL$ ) pobudzonym skokiem jednostkowym  $E \mathbf{1}(t)$ .
2. Narysować przebiegi napięć i prądu w szeregowym obwodzie  $RLC$  pobudzanego skokiem jednostkowym  $E \mathbf{1}(t)$  dla różnych tłumień obwodu.
3. Podać sposoby wyznaczania stałej czasu w szeregowym obwodzie  $RC$  ( $RL$ ) na podstawie odpowiedzi na skok jednostkowy.
4. Dane są wartości elementów  $R = 1 \Omega$ ,  $C = 1 \text{ F}$ ,  $L = 2 \text{ H}$ . Wyznaczyć prąd  $i(t)$  płynący w szeregowym obwodzie  $RLC$  w przypadku, kiedy pobudzeniem jest napięcie  $u(t) = 10 \cdot \mathbf{1}(t)$ .
5. W jaki sposób wpływa rezystancja wewnętrzna źródła zasilającego na przebiegi napięć i prądów w szeregowym obwodzie  $RC$  ( $RL$ ).
6. Omówić i zdefiniować pojęcia: składowa swobodna, wymuszona, przejściowa i ustalona.
7. W jaki sposób można rozpoznać, że w szeregowym obwodzie  $RLC$  (zestaw laboratoryjny) pobudzonym SEM  $E \cdot \mathbf{1}(t)$  napięcie  $u_C(t)$  ma przebieg aperiodyczny krytyczny.
8. Pokazać, że w szeregowym obwodzie  $RLC$ , w którym występują przebiegi oscylacyjne czas  $t_u$  ustalania napięcia prawie nie zależy od wartości pojemności  $C$ .
9. Wiadomo, że w szeregowym obwodzie  $RLC$  występuje przypadek oscylacyjny. Znana jest odpowiedź  $u_C(t)$ , gdy pobudzeniem jest napięcie  $\mathbf{1}(t)$ . Znana jest również wartość pojemności  $C$ . W jaki sposób na podstawie  $u_C(t)$  obliczyć wartości:  $R$  i  $L$ ?
10. Szeregowy obwód  $RL$  ( $R = 1 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ) pobudzany jest napięciem  $u(t) = 10 \sin(2t) \mathbf{1}(t)$ . Wyznaczyć przebieg prądu  $i(t)$  płynącego w tym w tym obwodzie. Wyróżnić składową swobodną i wymuszoną.

### Literatura

- [1] URUSKI M., WOLSKI W., Teoria obwodów I, skrypt PWr., Wrocław 1983.  
[2] ATABIEKOW G.I., Teoria liniowych obwodów elektrycznych, WNT, Warszawa 1967.  
[3] LAGASSE J., Teoria obwodów elektrycznych, WNT, Warszawa 1965.